

*Прочитайте текст.*

*В тетради запишите тему урока «Высказывания и высказывательные формы».*

*Запишите полные ответы на вопросы после текста.*

Изучая реальные процессы, математика описывает их, используя как естественный словесный язык, так и свой символический. Описание строится при помощи предложений. Но чтобы математические знания были достоверными, правильно отражали окружающую нас реальность, эти предложения должны быть истинными.

Но как узнать, истинное или ложное знание заключено в том или ином математическом предложении? На этот и другие вопросы, с ним связанные, мы попытаемся ответить в данном параграфе. А сейчас только заметим, что каждое математическое предложение характеризуется содержанием и логической формой (структурой), причем содержание неразрывно связано с формой, и нельзя осмыслить первое, не понимая второго.

Относительно понятий и отношений между ними можно высказывать различные суждения. Языковой формой суждений являются повествовательные предложения. Например, в начальном курсе математики можно встретить такие предложения:

- 1) число 12 – четное;
- 2)  $2 + 5 > 8$ ;
- 3)  $x + 5 = 8$ ;
- 4) В числе 15 один десяток и 5 единиц;
- 5) От перестановки множителей произведение не изменяется;
- 6) Некоторые числа делятся на 3.

Видим, что предложения, используемые в математике, могут быть записаны как на естественном (русском) языке, так и на математическом, с использованием символов. Далее, о предложениях 1, 4, 5 и 6 можно сказать, что они несут верную информацию, а предложение 2 – ложную. Относительно предложения  $x + 5 = 8$  вообще нельзя сказать: истинное оно или ложное.

Взгляд на предложение с позиции – истину или ложь оно нам сообщает – привел к понятию высказывания.

**Высказыванием** в математике называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Например, предложения 1, 2, 4, 5 и 6, приведенные выше, есть высказывания, причем предложения 1, 4, 5 и 6 – истинные, а 2 – ложное.

Высказывания принято обозначать прописными буквами латинского алфавита:  $A, B, C, \dots, Z$ . Если высказывание  $A$  истинно, то записывают:  $A$  – «и», если же высказывание  $A$  – ложно, то пишут:  $A$  – «л».

«Истина» и «ложь» называются значениями истинности высказывания. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно тем и другим оно не может.

Предложение  $x + 5 = 8$  не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать: истинно оно или ложно. Однако при подстановке конкретных значений переменной  $x$  оно обращается в высказывание: истинное или ложное. Например, если  $x = 2$ , то  $2 + 5 = 8$  – ложное высказывание, а при  $x = 3$  оно обращается в истинное высказывание  $3 + 5 = 8$ . Предложение  $x + 5 = 8$  называется *высказывательной формой*. Оно порождает множество высказываний одной и той же формы.

По числу переменных, входящих в высказывательную форму, различают одноместные, двухместные и т.д. высказывательные формы и обозначают:  $A(x)$ ,  $A(x, y)$  и т.д. Например,  $x + 5 = 8$  – одноместная высказывательная форма, а предложение «Прямая  $x$  параллельна прямой  $y$ » – двухместная.

Следует иметь в виду, что в высказывательной форме переменные могут содержаться неявно. Например, в предложениях: «число четное», «две прямые пересекаются» переменных нет, но они подразумеваются: «Число  $x$  – четное», «Две прямые  $x$  и  $y$  пересекаются».

Задание высказывательной формы, как правило, предполагает и задание того множества, из которого выбираются значения переменной (переменных), входящей в высказывательную форму. Это множество называется *областью определения* высказывательной формы. Например, неравенство  $x > 5$  можно рассматривать на множестве натуральных чисел, а можно считать, что значение переменной  $x$  выбирается из множества действительных чисел. Тогда в первом случае областью определения неравенства  $x > 5$  будет множество натуральных чисел, а во втором множество действительных чисел.

Дадим определение одноместной высказывательной формы (понятие высказывательной формы, содержащей две и более переменных, определяется аналогично).

Определение. *Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве  $X$ , называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества  $X$ .*

Среди всех возможных значений переменной нас в первую очередь интересуют те, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание. Множество таких значений переменных называют *множеством истинности* высказывательной формы. Например, множеством истинности высказывательной формы  $x > 5$ , заданной на множестве действительных чисел, будет промежуток  $(5; \infty)$ . Множество истинности высказывательной формы  $x + 5 = 8$ , заданной на множестве целых неотрицательных чисел, состоит из одного числа 3.

Условимся обозначить множество истинности высказывательной формы буквой  $T$ . Тогда, согласно определению, всегда  $T \subset X$ .

Предложения (высказывания и высказывательные формы), которые мы рассматривали, были простыми, но можно привести примеры суждений, языковой формой которых будут сложные предложения. Например: «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны». Естественно возникает вопрос: как определить значение истинности таких высказываний и находить множество истинности таких высказывательных форм?

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо познакомиться с некоторыми логическими понятиями.

В логике считают, что из двух данных предложений можно образовать новые предложения, используя для этого союзы «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда» и др. С помощью частицы «не» или словосочетания «неверно, что» можно из одного предложения получить новое.

Слова «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда», а также частицу «не» (слова «неверно, что») называют *логическим связками*. Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют *составными*. Предложения, не являющиеся составными, называют *элементарными*.

Приведем примеры составных предложений:

1) Число 28 четное и делится на 7.

Это предложение образовано из двух элементарных: «число 28 четное», «число 28 делится на 7» с помощью логической связки «и».

2) Число  $x$  меньше или равно 8.

Это предложение образовано из двух элементарных: «число  $x$  меньше 8», «число  $x$  равно 8» с помощью логической связки «или».

3) Число 14 не делится на 4.

Это составное высказывание образовано из предложения «число 14 делится на 4» с помощью частицы «не».

Вы, наверное, уже обратили внимание на то, что все три предложения, являясь с логической точки зрения составными, по своей грамматической структуре – простые. Не всегда, но так бывает: простое предложение по своей логической структуре может быть составным.

А как определять значение истинности составного высказывания? Например, истинно или ложно высказывание: «число 28 делится на 7 и на 9»? Элементарное высказывание «число 28 делится на 7», входящее в составное, истинное – это известно из начального курса математики. Второе элементарное высказывание «число 28 делится на 9» – ложное (и это нам известно). А каким будет в этом случае значение истинности составного высказывания, образованного из этих высказываний с помощью союза «и»? Ответить на этот вопрос можно, если знать смысл этого союза. Но так как составные высказывания образуются с помощью и других логических связок, то возникает необходимость в уточнении их смысла.

Кроме того, уточнение смысла используемых в математике связок обусловлено их неоднозначным толкованием в обыденной речи, что может привести к неоднозначному ответу при нахождении значения истинности составных высказываний.

Итак, значение истинности элементарного высказывания определяют, исходя из его содержания с опорой на известные знания. Чтобы определить значение истинности составного высказывания, надо знать смысл логических связок, с помощью которых оно образовано из элементарных, и уметь выявлять логическую структуру высказывания.

Для выявления логической структуры составного предложения нужно установить:

1) из каких элементарных предложений образовано данное составное предложение;

2) с помощью каких логических связок оно образовано.

1. *Запишите определение высказывания.*

2. *Какими буквами обозначают высказывания?*

3. *Что называют значением истинности высказывания?*
4. *Может ли высказывание быть одновременно истинным и ложным?*
5. *Как записать, что высказывание ложно?*
6. *Что называют значениями истинности высказывания?*
7. *По числу переменных, какие высказывательные формы бывают? Как их обозначают?*
8. *Что называют одноместной высказывательной формой?*
9. *Что называется множеством истинности высказывательной формы? Как обозначают множество истинности высказывательной формы?*
10. *Что называют логическими связками?*
11. *Перечислите союзы с помощью которых в логике из простых предложений можно образовывать составные предложения?*
12. *Как называются предложения образованные из других предложений с помощью логических связок?*